ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ (ΠΟΛ/ΣΤΕΣ LAGRANGE)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $r<n$.
Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπ. ακρότατο υπό τη συνθήκη $g(x)=0$, στο σημείο $x_0 \in M = \{x \in U : g(x)=0\}$ αν η $f|_M$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΠΟΛ/ΣΤΩΝ LAGRANGE)
Έστω ότι $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f \in C^1(U)$, $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $r<n$
και $g \in C^1(U, \mathbb{R}^r)$. Αν η f παρουσιάζει υπό τη συνθήκη $g(x)=0$, τοπικό ακρότατο στο $\bar{x}_0$ και η παράγωγος της g στο x_0 (δηλ. $Dg(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \end{bmatrix}$) έναν πίνακα βαθμίδας r
τότε, $(\exists \lambda_j \in \mathbb{R}) : j=1,\dots,r$ (πολ/στές Lagrange) έτσι ώστε να ισχύει:

$$(*) \quad \nabla f(\bar{x}_0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \cdot Dg(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^n$$

όπου η $(*)$ είναι ισοδύναμη με το να γράψουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}_0), \quad \forall i=1,\dots,n$$

Πως χρησιμοποιούμε το θεώρημα αυτό;

1) Επιλύουμε ως προς $(\bar{x},\bar{\lambda}) = (x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_r) \in U\times\mathbb{R}^r$ το σύστημα $\nabla F(\bar{x},\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^{n+r}$

Άρα, $F(\bar{x},\lambda) = \bar{\lambda}\cdot\bar{g}(\bar{x}) - f(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{\lambda}^T \cdot Dg(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = 0$

και $\bar{g}(\bar{x}) = 0$ $(\Leftrightarrow g_j(\bar{x}) = 0,\ \forall j = 1,\dots,r)$

2) Τα $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n)$ του $(\bar{x},\lambda)$ που βρήκαμε ως λύσεις του $\nabla F(\bar{x},\bar{\lambda}) = \bar{0}$ για τα οποία $\operatorname{rank} D\bar{g}(\bar{x}) = r$ είναι υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων

3) Βρίσκουμε και τα $\bar{x}\in M$ για τα οποία $\operatorname{rank} D\bar{g}(\bar{x}) < r$ τα οποία είναι επίσης υποψήφια σημεία τοπ. ακροτάτων

4) εξετάζουμε τα σημεία $\bar{x}$ όπου βρήκαμε στο (2), (3) ως προς το αν και τι είδους ακρότατα είναι.

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε τα τοπ. ακρότατα της $f(x,y) = x\cdot y$ περιορισμένης στο μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$.

ΛΥΣΗ

(Προφανής (αν δουλεύει) τρόπος: Ψάχνω τα σημεία τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων $h_\pm(x) = f(x,\pm\sqrt{1-x^2})$ $\forall x\in[-1,1]$.) Λύση με χρήση πολλ/στών Lagrange

Θέλουμε να βρούμε τα τοπ. ακρότατα (ή τα σημεία τοπ. ακροτάτων) της f υπό τη συνθήκη

$g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ (αφού $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\} =$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \Rightarrow r=1$ $(n=2)$

$F(x,y,\lambda) = \lambda\cdot g(x,y) - f(x,y)$

Τουτέστιν,

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \left(\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ g(x,y)\right) = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \nabla F(x,y,\lambda) = (2\lambda x - y,\ 2\lambda y - x,\ x^2+y^2-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $y = 2\lambda x \wedge x = 2\lambda y$ $\quad 4\lambda^2(y^2+x^2) = 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1/2$ για $y = \pm x$ και $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow (x,y) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1) \right\}$

επομενως,

$\operatorname{rank} Dg(x,y) = \operatorname{rank} \nabla g(x,y) = \operatorname{rank}(2x, 2y) = 1$

$\forall (x,y) \in M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1 \}$

δηλ. $(x,y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2+y^2=1$

Αρα, εχουμε μοναδικά υποψήφια σημεία τοπ. ακροτάτων τα σημεία στην

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1) \right\}$

- $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

- $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

Το $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$ συμπαγές

δηλ. κλειστό και φραγμένο αφου $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|(x,y)\|^2 = 1 \Leftrightarrow \|(x,y)\| = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in M \subset \mathbb{R}^2$

(Το M φραγμενο αν $\forall (x,y) \in M$, $\|(x,y)\| \leq c > 0$

και κλειστό (δηλ $\forall (x_\nu, y_\nu) \in M$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

ισχυει $(x_0, y_0) \in M$)

Αφου g συνεχής και $g(x,y)$

Εστω $(x_\nu, y_\nu) \in M$ με $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{g(x_\nu, y_\nu) \to g(x_0, y_0) = 0} \to (x_0, y_0)$)

Η f συνεχής (ως γινόμενο προβολών) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η $f|_M$ εχει σημεία ολικου-τοπικου μεγ. και από το Θεωρ. Lagrange είναι σε ένα απο αυτά που βρήκαμε.